

# Jacobi-, Gauß-Seidel- und Relaxationsverfahren

Matthias Bosewitz

28.01.2010

## 1 Motivation

Es soll ein lineares Gleichungssystem gelöst werden

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Das führt für invertierbare Matrizen zum Ergebnis  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

Es muss also  $A^{-1}$  berechnet werden. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann ist die Berechnung von  $A^{-1}$  mit einem Aufwand  $\sim \frac{2}{3}n^3$  Operationen verbunden.

Bei großen Gleichungssystemen mit mehreren Millionen Einträgen ist also die Lösung sehr aufwändig. Es stellt sich also die Frage, ob sich die Lösung nicht mit weniger Operationen ermitteln lässt.

*Idee:* Wir versuchen die Lösung iterativ zu bestimmen. Dazu benutzen wir eine Methode der Form

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$$

Wobei  $B$  eine geeignete Matrix und  $\mathbf{f}$  ein geeigneter Vektor ist. Lässt sich mit solch einer Methode  $\mathbf{x}$  in  $m$  Schritten berechnen, so werden nur  $\sim n^2m$  Operationen zur Berechnung benötigt, was für  $m \ll n$  wesentlich weniger Aufwand als die direkte Methode bedeutet.

## 2 Lineare iterative Methoden

Wir wollen uns nun damit befassen, wann solche Methoden zu einem Ergebnis führen.

**Definition 2.1.** Eine Methode der Form  $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$  heißt konsistent mit  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , wenn

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= B\mathbf{x} + \mathbf{f} \\ \Leftrightarrow \mathbf{f} &= (I - B)A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

**Definition 2.2.**

$$\mathbf{e}^{(k)} := \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$$

nennen wir den Fehler im  $k$ -ten Schritt.

Somit liegt Konvergenz vor, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(k)} = 0$

Nun benötigt man also eine Aussage, wann ein Verfahren konvergiert um herauszufinden ob ein Verfahren zur Lösung eines Problems sinnvoll ist. Diese lässt sich über den Spektralradius der Iterationsmatrix finden.

**Definition 2.3.** Spektralradius:  $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}$

**Satz 2.4.** Sei  $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$  ein konsistentes Verfahren. Dann gilt

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} \iff \rho(B) < 1$$

Für beliebige Startwerte  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x} \\ &= B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f} - \mathbf{x} \\ &= B\mathbf{x}^{(k)} + (I - B)A^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x} \\ &= B(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) = B\mathbf{e}^{(k)} \\ \implies \mathbf{e}^{(k)} &= B^k \mathbf{e}^{(0)} \end{aligned}$$

Also muss für Konvergenz  $B^k \rightarrow 0$  vorliegen. B muss also eine Kontraktion sein. Dafür wissen wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0 \iff \rho(B) < 1$$

Also gilt, dann wie behauptet

$$\mathbf{e}^{(k)} \rightarrow 0 \iff \rho(B) < 1$$

□

### 3 Jacobi-Verfahren

Das erste Iterative Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen, dass ich vorstelle ist das Jacobi-Verfahren (oder auch simultaneous iteration method). Zur Idee, die zu dem Verfahren führt betrachte man das ausgeschriebene Gleichungssystem zu  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

Dies lässt sich, sofern  $a_{ii} > 0$ , nach  $x_i$  umstellen

$$x_i = (b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \dots - a_{in}x_n)$$

Nach eben diesen Prinzip arbeitet das Jacobi-Verfahren:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

In dieser Form ist das Verfahren auch gut im Computer implementierbar. Es spielt insbesondere keine Rolle, in welcher Reihenfolge die  $x_i^{(k+1)}$  berechnet werden. Um Satz 2.3 anwenden zu können ist aber eine Darstellung als Matrizenoperation günstiger.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1} \left( (O + U)\mathbf{x}^{(k)} \right) + D^{-1}\mathbf{b}$$

Wobei  $D$  die Diagonalmatrix mit den Einträgen  $a_{ii}$  ist.  $-O$  ist die strikt obere und  $-U$  die strikt untere Dreiecksmatrix von  $A$ .

Damit folgt natürlich auch dass  $A = D - (O + U)$ .

Also ist die Iterationsmatrix des Jacobiverfahrens sofort abzulesen:

$$B_J = D^{-1}(O + U) = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$$

### 3.1 JOR-Verfahren (Jacobi over-relaxation)

Das Jacobiverfahren benutzt zur Berechnung von  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  das bereits berechnete  $\mathbf{x}^{(k)}$  nicht. In vielen Fällen ist das nicht optimal. Daher bietet es sich an einen sogenannten Relaxationsparameter  $\omega$  einzuführen. Dabei wird der neu berechnete Wert  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  des Jacobiverfahrens quasi mit dem Wert  $\mathbf{x}^{(k)}$  gemischt.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

In der Matrixschreibweise ist das noch deutlicher zu erkennen.

$$B_{J_\omega} = \omega B_J + (1 - \omega) I$$

Für  $\omega = 1$  handelt es sich um das normale Jacobi-Verfahren.

## 4 Gauß-Seidel-Verfahren

Ein weiteres Verfahren ist das Gauß-Seidel-Verfahren. Dabei wird ausgenutzt, dass man bei der Berechnung von  $x_i^{k+1}$  die  $x_l^{k+1}$  mit  $l < i$  auch noch zur Verfügung hat, sofern man die Vektoreinträge der Reihenfolge nach berechnet. Dies führt dann zu folgendem Verfahren:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Man verliert dabei die Parallelisierbarkeit, also die Möglichkeit, die Einträge unabhängig von einander berechnen zu können. Andererseits benötigt man weniger Speicher, da man die Werte von  $x_i^{(k)}$  einfach mit den neu berechneten  $x_i^{(k+1)}$  überschreiben kann.

Die Iterationsmatrix des Verfahrens ist

$$B_{GS} = (D - U)^{-1} O = I - (D - U)^{-1} A$$

### 4.1 SOR-Verfahren (Successive over-relaxation)

Ebenso wie beim Jacobi-Verfahren lässt sich auch beim Gauß-Seidel-Verfahren ein Relaxationsparameter  $\omega$  einführen.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

Die Iterationsmatrix ist dann

$$B(\omega) = \left( \frac{1}{\omega} D - U \right) \left( O + \frac{1 - \omega}{\omega} D \right)$$

Für  $\omega = 1$  haben wir das normale Gauß-Seidel-Verfahren. Für  $\omega \in ]0, 1[$  wird es Unter- und für  $\omega > 1$  Überrelaxationsverfahren genannt.

## 5 Konvergenzresultate

Nun haben wir also diverse iterative konsistente Verfahren zur Verfügung und mit *Satz 2.4* haben wir eine Aussage dafür wann sie konvergieren. Diese ist praktisch allerdings nicht anwendbar, da zum einen das Berechnen der Eigenwerte viel zu aufwändig ist und zweitens die Iterationsmatrix nicht unbedingt zur Verfügung steht (etwa beim Gauß-Seidel-Verfahren wo  $B_{GS}$  zur Implementierung nicht gebraucht wird).

Es gibt aber einige Klassen von Matrizen  $A$  für die sich Aussagen über die Konvergenz zu den einzelnen Verfahren machen lassen. Dazu gibt es relativ viele Sätze, von denen hier nur einige vorgestellt werden. Einen ganz interessanten will ich hier auch beweisen.

**Satz 5.1.** (ohne Beweis)

*Ist  $A$  streng zeilendiagonaldominant so sind das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren konvergent.*

**Satz 5.2.** (ohne Beweis)

*Konvergiert das Jacobi-Verfahren, so konvergiert auch das JOR-Verfahren für alle  $\omega$  für die gilt  $0 < \omega \leq 1$ .*

Somit kann man also den Parameter  $\omega$  wenn möglich so wählen, dass das Verfahren möglichst schnell konvergiert.

**Satz 5.3.** *Ist  $A$  symmetrisch und positiv definit, so konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren monoton bezüglich  $\|\cdot\|_A$ .*

Zum beweisen benutze ich

**Lemma 5.4.** *Sei  $G$  eine Matrix und  $G^{ad}$  die bezüglich des Skalarprodukts  $\langle x, y \rangle_A := \langle x, Ay \rangle$  adjungierte Matrix von  $G$ .*

*Dann gilt: Ist  $C := I - G^{ad}G$  positiv definit, so ist  $\rho(G) \leq \|G\|_A < 1$*

**Beweis:** (Lemma)

$C := I - G^{ad}G$  ist positiv definit. Nach Definition ist also

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0 \quad \langle Cx, x \rangle_A &= \langle x, x \rangle_A - \langle G^{ad}Gx, x \rangle_A \\ &= \langle x, x \rangle_A - \langle Gx, Gx \rangle_A > 0 \\ \Rightarrow \|x\|_A &> \|Gx\|_A \quad \forall x \neq 0 \\ \Rightarrow \rho(G) &\leq \|Gx\|_A := \sup_{\|x\|=1} \|Gx\| < 1 \end{aligned}$$

□

**Beweis:** (Satz)

Es ist zu zeigen, dass  $C = I - B_{GS}^{ad}B_{GS}$  positiv definit ist. Dann lässt sich der Satz aus dem Lemma folgern.

$B_{GS} = I - (D - U)^{-1}A$  und da  $A$  symmetrisch, ist  $O = U^T$

$$\begin{aligned} B_{GS}^{ad} &= A^{-1}B_{GS}^T A \\ &= I - A^{-1}((D - U)^{-1}A)^T A \\ &= I - A^{-1}A^T(D - U)^{-T} \\ &= I - (D - O)^{-1}A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies C &= I - B_{GS}^{ad} B_{GS} \\
&= I - (I - (D - O)^{-1}A) (I - (D - U)^{-1}A) \\
&= I - I + (D - U)^{-1}A + (D - O)^{-1}A - (D - O)^{-1}A(D - U)^{-1}A \\
&= (D - O)^{-1}D(D - U)^{-1}A
\end{aligned}$$

Nun müssen wir also nur noch testen ob  $C$  positiv definit ist. Das testen wir wieder bezüglich  $\langle x, y \rangle_A$ , da es dort leicht zu sehen ist. Dazu benutzen wir das  $D$  nur positive Einträge hat wenn  $A$  positiv definit ist. Also lässt sich  $D = \left(D^{\frac{1}{2}}\right)^2$  schreiben.

$$\begin{aligned}
\implies \langle Cx, x \rangle_A &= \langle (D - O)^{-1}D(D - U)^{-1}Ax, Ax \rangle \\
&= \langle D^{\frac{1}{2}}(D - U)^{-1}Ax, D^{\frac{1}{2}}(D - U)^{-1}Ax \rangle \\
&> 0 \quad \text{da quadratische Form}
\end{aligned}$$

Nach dem Lemma folgt also die Aussage.

$$\Rightarrow \rho(B) \leq \|B_{GS}\|_A < 1$$

□