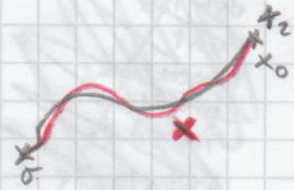
Theo Phy II — Übungsblatt 7

(3) $S = \int_0^{t_2} \overbrace{\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2\right]}^{=:F(t)} dt$

$x_0(t) = A\sin(\omega t) \qquad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$

$t_2 > \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi/\omega = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \tau_j := \frac{j\pi t}{t_2}$



$x(t) = x_0(t) + \varepsilon\,\eta(t) \qquad \eta(0) = \eta(t_2) = 0$

$\eta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\left(\frac{j\pi t}{t_2}\right) \qquad b_k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\left(\frac{j\pi t}{t_2}\right)$

$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{j\pi}{t_2}\cos\left(\frac{j\pi t}{t_2}\right)$

$\Rightarrow S = \int_0^{t_2} \Big[\frac{m}{2}\Big(A^2\frac{k}{m}\cos^2(\omega t) + 2\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty} A\omega\cos(\omega t)\, b_j \frac{j\pi}{t_2}\cos(\tau_j)$

$+ \varepsilon^2 \sum_{\substack{j=1\\i=1}}^{\infty} b_j \frac{j\pi}{t_2} b_i \frac{i\pi}{t_2}\cos(\tau_j)\cos(\tau_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big)$

$- \frac{k}{2}\Big(A^2\sin^2(\omega t) + 2\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty} A\sin(\omega t)\, b_j \sin(\tau_j)$

$+ \varepsilon^2 \sum_{\substack{j=1\\i=1}}^{\infty} b_j b_i \sin(\tau_j)\sin(\tau_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big)\Big] dt$

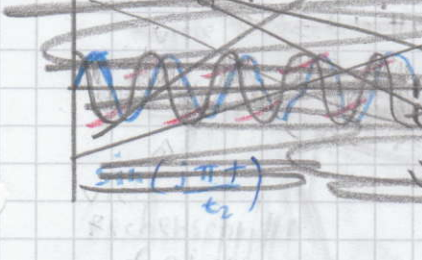
$\frac{d}{d\varepsilon}(F)_{\varepsilon=0} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(Ak\cos(\omega t)\, b_j \frac{j\pi}{t_2}\cos(\tau_j) - Ak\sin(\omega t)\, b_j \sin(\tau_j)\right)$

$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}(F)_{\varepsilon=0} = \sum_{\substack{j=1\\i=1}}^{\infty}\left(m b_j \frac{j\pi}{t_2} b_i \frac{i\pi}{t_2}\cos(\tau_j)\cos(\tau_i) - k b_j b_i \sin(\tau_j)\sin(\tau_i)\right)$

$\cancel{\eta(t_2) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\pi) = 0}$

$\Rightarrow \left(\frac{d^2S}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} = \sum_{\substack{j=1\\i=1}}^{\infty}\Big[m b_j b_i \frac{j i \pi^2}{t_2^2}\int_0^{t_2} \underbrace{\cos(\tau_j)}_{u}\underbrace{\cos(\tau_i)}_{v} dt$

$- k b_j b_i \int_0^{t_2} \underbrace{\sin(\tau_j)}_{w}\underbrace{\sin(\tau_i)}_{r} dt \Big]$



~~Man sieht: für j ungerade:~~ $\cancel{\int_0^{t_2} \cos(\tau_j) = 0}$

~~für j gerade:~~ $\cancel{\int_0^{t_2} \sin(\tau_j) = 0}$

Rückseite auf einem Schmierzettel, der kaum lesbar ist

~~$\Rightarrow \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty}$ der Term den ich nicht hinschreiben brachte in einer Konstante~~

~~$\Rightarrow$ Alles viel zu schwer aufzulösen. Das sollte irgendwie 0 rauskommen $\Rightarrow$ weder Maximum noch Minimum~~

$$\Rightarrow \quad = \sum_{\substack{j=1\\ i=1}}^{\infty}\left\{ m b_j b_i \frac{j i \pi^2}{t_2^2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{t_2}(j-i)\right)}{2\pi(j-i)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{t_2}(j+i)\right)}{2\pi(j+i)}\right]_0^{t_2} - k b_j b_i \; t_2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{t_2}(j-i)\right)}{2\pi(j-i)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{t_2}(j+i)\right)}{2\pi(j+i)}\right]_0^{t_2}\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{ m b_j b_i \frac{j i \pi}{2 t_2}\left(\frac{\sin(\pi(j-i))}{(j-i)} + \frac{\sin(\pi(j+i))}{(j+i)}\right) - k b_j b_i \frac{t_2 \pi}{2}\left(\frac{\sin(\pi(j-i))}{(j-i)} - \frac{\sin(\pi(j+i))}{(j+i)}\right)\right\}$$

Aus $\sin(k\pi) = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$ folgt dann: $\quad = 0$

$\Rightarrow$ weder Maximum noch Minimum.